

## تحلیل تنش‌ی تونل‌های سطحی در خاک‌های لایه‌ای با استفاده از روش اجزای مرزی نیم‌صفحه

مهدی پنجمی\*، استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنجان  
بهمن انصاری، کارشناس ارشد ژئوتکنیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زنجان  
جعفر عسگری مارنانی، استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز

E-mail: m.panji@srbiau.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۴/۱۰/۱۸ - پذیرش: ۱۳۹۵/۰۲/۲۳

### چکیده

در این مقاله، با استفاده از روش اجزای مرزی نیم‌صفحه، محیط‌های لایه‌ای خاک شامل تونل‌های سطحی مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. در استفاده از روش مذکور، وجه میانی لایه‌ها و پیرامون تونل نیاز به مش‌بندی دارند. بنابراین، از جمله مهمترین مسائل موجود در مطالعات پیشین مبتنی بر اجزای مرزی محیط کامل که نیاز به گسسته‌سازی سطح صاف زمین و مرزهای بریده شده مفروض در دوردست است، به‌خوبی برطرف شده است. ضمن تحلیل چند مثال و صحنه‌گذاری نتایج حاصل با برخی پاسخ‌های تحلیلی در دسترس، طی یک مطالعه‌ی عددی، فرمول‌بندی این روش برای یک محیط دولایه خاک با تونل دایره‌ای زیرزمینی توسعه داده شده و اثر پارامترهایی نظیر عمق احداث تونل و خروج از مرکزیت بار سطحی بر الگوی تنش‌ی محیط خاک مطالعه شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که روش اجزای مرزی نیم‌صفحه در مدل‌سازی محیط‌های لایه‌ای از قابلیت بالایی برخوردار است. روش پیشنهاد شده می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش‌های پیشین اجزای مرزی، به‌ویژه در مدل‌سازی مسائل مختلف در حوزه‌ی مهندسی ژئوتکنیک، باشد.

واژه‌های کلیدی: اجزای مرزی نیم‌صفحه، محیط‌های لایه‌ای، تونل، تحلیل تنش‌ی.

### ۱. مقدمه

رفتارها بهره‌جسته‌اند. در گذشته، تحقیقات انجام شده در این زمینه بیشتر به کمک روش‌های تحلیلی و آزمایشگاهی صورت می‌گرفت. لاگاناتان و پولوس (۱۹۹۸) تحلیلی ناشی از حفر تونل در زمین‌های نرم را ارائه نمودند. جیودا و لوکاتلی (۱۹۹۹) با انجام یک

بررسی رفتار محیط‌های خاکی در برابر عوامل خارجی و داخلی از جمله مسائل پیچیده و چالش برانگیز علوم مکانیک خاک و سنگ می‌باشد. محققین و پژوهشگران این عرصه از روش‌های مختلفی برای بررسی این

مدل‌سازی و افزایش حجم داده‌ها در مسائل مرتبط با مرزهای نامحدود و نیمه‌نامحدود موجب ایجاد روش-های مرزی شده است. روش اجزای مرزی (BEM) از جمله این روش‌ها است که قابلیت تحلیل مسائل با دامنه‌های بینهایت را با دقت بسیار مطلوب دارد (عسگری مارنانی و پنجمی، ۱۳۸۶).

روش اجزای مرزی در محیط‌های محدود (کامل)، نیمه نامحدود (نیم‌صفحه) و نامحدود، قابلیت فرمول‌بندی دارد (عسگری مارنانی و پنجمی، ۱۳۸۶). در تعیین فرمول‌بندی اجزای مرزی محدود، محیط به-صورت کامل و با شرایط مرزی مشخص مدل‌سازی می‌شود. برای مدل‌سازی محیط‌های نیمه نامحدود به-صورت یک محیط کامل، علاوه بر گسسته‌سازی سطح صاف زمین تا یک فاصله‌ی خیلی دور از ناحیه‌ی مورد مطالعه و اقلان تقریبی شرایط بدون تنش سطح زمین، لازم است برای دوری از مشکلات انتگرال‌گیری عددی، محیط مورد نظر با اجزای مرزی بسته شود. محققین مختلفی با استفاده از روش اجزای مرزی محیط کامل به مدل‌سازی مسائل پرداخته‌اند که از آن جمله می‌توان مطالعات بنرجی و باترفیلد (۱۹۸۱) شیائو و کارتر (۱۹۸۳)، یانگ و استرلینگ (۱۹۸۹)، عسگری مارنانی و پنجمی (۱۳۸۵) و پنجمی و همکاران (۱۳۹۱ و ۲۰۱۱) را نام برد.

روش اجزای مرزی نیم‌صفحه که از اقلان شرایط تنش آزاد سطح زمین در حل معادلات تعادل حاصل می‌شود، اولین بار توسط ملان (۱۹۳۲) معرفی شده است. میندلین (۱۹۳۶) اولین کسی بود که فرمول‌بندی این روش را در الاستیسیته مطرح کرد. سال‌ها بعد، تلس و بریبا (۱۹۸۰) با توسعه‌ی روش میندلین، فرمول‌بندی کامل آن را جهت تحلیل مسائل الاستواستاتیک ارائه دادند. اخیراً پنجمی و همکاران (۱۳۹۴) با استفاده از روش اجزای مرزی نیم‌صفحه،

تحلیل بازگشتی، مکانیسم گسترش نشست‌های سطحی زمین‌های ماسه‌ای را در حضور تونل‌های کم‌عمق مطالعه نمودند. لی و رو (۱۹۹۱) با مدل‌سازی محیط خاک شامل یک حفره و در ادامه با دو حفره در دستگاه سانتیفریوژ، رفتار تغییر مکانی آن را بررسی کردند. ویرویت (۱۹۹۸) از جمله محققینی است که یک روش تحلیلی مبتنی بر فضای مختلط به منظور بررسی تأثیر احداث بازشدگی‌های زیرسطحی، نظیر تونل‌ها، بر محیط اطراف آن‌ها ارائه کرده است.

امروزه، با پیشرفت روزافزون رایانه‌ها و ابزارهای محاسباتی، روش‌های عددی بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته‌اند. روش‌های عددی بر مبنای گسسته‌سازی به دو روش حجمی و مرزی تقسیم می‌شوند که از آن جمله روش اجزای محدود (FEM) و روش تفاضل محدود (FDM) از مهمترین روش‌های المان‌بندی حجمی هستند. محققین متعددی با استفاده از این روش‌ها به مطالعه و تحلیل محیط خاک پرداخته‌اند. آگارد و بارد (۲۰۰۱) به کمک روش اجزای محدود به بررسی اثر تونل‌های پوشش‌دار کم‌عمق بر تغییر مکان و نشست سطح زمین پرداخته‌اند. گارنر و کافمن (۲۰۱۳) با بهره‌گیری از روش‌های دامنه‌ای و بررسی نشست زمین پیرامون حفرات زیرزمینی، یک معیار بهینه جهت طراحی آن ارائه دادند. مولون و همکاران (۲۰۰۹) با استفاده از روش تفاضل محدود به بررسی اثر فشار داخلی حفرات دایره‌ای و نشست‌های ایجاد شده توسط آن پرداختند. چن و مارتین (۲۰۰۲) نیز از دیگر محققینی هستند که اثر اندرکنش شمع‌های گروهی و خاک اطراف آن‌ها را به کمک روش تفاضل محدود ارزیابی کردند. علی‌رغم دقت مطلوب و سهولت در فرمول‌بندی این روش‌ها در تحلیل مسائل محدود، وجود پیچیدگی در

می‌شود. در ادامه نیز به عنوان مطالعه عددی، رفتار یک محیط دولایه تحت بازشدگی زیرسطحی، با استفاده از روش پیشنهاد شده بررسی گردیده است. کاربرد روش اجزای مرزی نیم‌صفحه در تحلیل محیط‌های چندلایه و نمایش سهولت مدل‌سازی آن از جمله مهمترین هدف‌های تحقیق حاضر به شمار می‌رود.

## ۲. اجزای مرزی نیم‌صفحه

### ۲-۱. حل‌های اساسی نیم‌صفحه

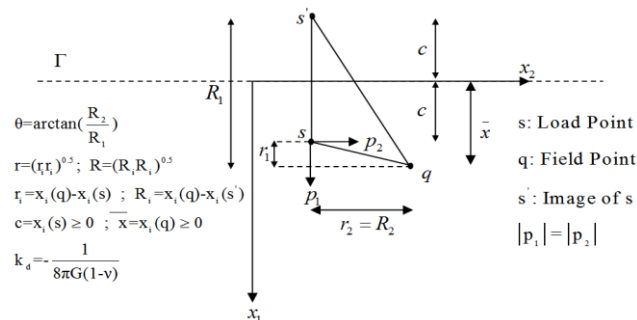
در شکل ۱، یک محیط نیمه نامحدود نشان داده شده است. شرایط مرزی حاکم بر سطح زمین (مرز  $X_2$ ) صفر بودن تنش وارد بر آن است. در روش اجزای مرزی نیم‌صفحه، شرایط مرزی تنش آزاد (سطح زمین) در بطن فرمول‌بندی به طور دقیق اقلان شده است. لذا، حل‌های اساسی نیم‌صفحه، علاوه بر حل‌های کلونین، شامل قسمت تکمیلی مطابق زیر می‌شوند (تلس و بریبا، ۱۹۸۰):

$$(-)^* = (-)^K + (-)^C \quad (1)$$

بالانویس  $K$  و  $C$  به ترتیب مبین حل‌های اساسی کلونین (مربوط به فرمول‌بندی اجزای مرزی محیط کامل است که توضیحات مربوطه در مرجع (بریبا و دومینگز، ۱۹۹۲) ارائه شده است) و بخش مکمل می‌باشد که از اقلان شرایط مرزی حاصل می‌شود.

به تحلیل حفرات پوشش‌دار مدفون در خاک‌های تک-لایه پرداخته و فرمول‌بندی لازم جهت تحلیل این نوع مسائل را ارائه کرده‌اند. علی‌رغم پیچیدگی فرمول‌بندی اجزای مرزی نیم‌صفحه، به دلیل اقلان شرایط تنش آزاد سطح زمین، دیگر نیاز به گسسته‌سازی و تعریف مرزهای پیرامونی فرضی، اعم از سطح صاف زمین و بریده شده دوردست، نبوده و تنها مرزهایی که تحت قیود خاص قرار دارند گسسته می‌شوند. این ویژگی، علاوه بر افزایش دقت، موجب افزایش چشمگیر سرعت محاسبات در بسیاری از مسائل خواهد شد.

چنانچه ادبیات فنی نشان می‌دهد، اجزای مرزی محیط کامل در تحلیل مسائل حاکم بر محیط‌های نامحدود توسعه داده شده است (عسگری مارنانی و پنجی، ۱۳۸۵؛ پنجی و همکاران، ۱۳۹۱ و پنجی و همکاران، ۲۰۱۱). از سوی دیگر، با توجه به پیچیدگی فرمول‌بندی اجزای مرزی نیم‌صفحه و فرمول‌بندی دوچندان آن، هنوز به طور کامل در تحلیل محیط‌های لایه‌ای به کار گرفته نشده است. بنابراین، در این مقاله، با فرض یک محیط چندلایه، فرمول‌بندی کامل اجزای مرزی نیم‌صفحه ارائه شده است. در این راستا، ابتدا با در نظر گرفتن معادلات حاکم برای هر لایه و برقراری شرایط سازگاری و پیوستگی در وجوه میانی لایه‌ها، معادله‌ی انتگرال مرزی دوگانه استخراج شده و حل



شکل ۱. بار نقطه‌ای در فضای نیم‌صفحه

جملات تکمیلی برای مؤلفه‌های تغییرمکان به صورت زیر ارائه شده‌اند (تلس و بریبا، ۱۹۸۰):

$$u_{11}^c = k_d \left\{ -[8(1-v)^2 - (3-4v)] \ln R + \frac{[(3-4v)R_1^2 - 2c\bar{x}]}{R^2} + \frac{4c\bar{x}R_1^2}{R^4} \right\} \quad (2)$$

$$u_{12}^c = k_d \left\{ \frac{(3-4v)r_1 r_2}{R^2} + \frac{4c\bar{x}R_1 r_2}{R^4} - 4(1-v)(1-2v)\theta \right\} \quad (3)$$

$$u_{21}^c = k_d \left\{ \frac{(3-4v)r_1 r_2}{R^2} - \frac{4c\bar{x}R_1 r_2}{R^4} + 4(1-v)(1-2v)\theta \right\} \quad (4)$$

$$u_{22}^c = k_d \left\{ -[8(1-v)^2 - (3-4v)] \ln R + \frac{[(3-4v)r_2^2 + 2c\bar{x}]}{R^2} - \frac{4c\bar{x}r_2^2}{R^4} \right\} \quad (5)$$

## ۲-۲. معادلات انتگرال مرزی

معادله انتگرالی در روش اجزای مرزی مطابق زیر است (عسگری مارنانی و پنجمی، ۱۳۸۶ و بریبا و دومینگز، ۱۹۹۲):

$$c_{ij} u_i = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma \quad (7)$$

در رابطه‌ی فوق،  $u_{ij}^*$  و  $p_{ij}^*$  به ترتیب حل‌های اساسی نیم‌صفحه برای مؤلفه‌های تغییرمکان و نیروهای سطحی،  $u$  و  $p$  مقادیر تغییرمکان و نیروهای سطحی در مرز  $\Gamma$  و  $c_{ij}$  مقادیر ثابتی هستند که با توجه به زاویه‌ی شکست مرزی به راحتی تعیین می‌شوند. از حل معادله‌ی (۷)، مقادیر مرزی، اعم از تغییرمکان و نیروهای سطحی، به دست می‌آیند. در نهایت، می‌توان برای نقاط داخلی، تنش‌های درونی را بر اساس مقادیر مرزی طبق رابطه زیر به دست آورد:

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} u_{ijk}^* p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ijk}^* u_k d\Gamma \quad (8)$$

به طوری که در رابطه‌ی فوق،  $\sigma_{ij}$  مبین تنش‌های درونی در نقطه‌ی  $i$  ام و در امتداد  $j$  ام است.

در روابط فوق،  $G$  مدول برشی و  $\nu$  ضریب پواسون می‌باشد. سایر پارامترها با توجه به شکل ۱ قابل محاسبه هستند. برای تشکیل انتگرال مرزی در محیط نیم‌صفحه، علاوه بر حل‌های اساسی مؤلفه‌های تغییرمکان، نیاز به مؤلفه‌های نیروهای سطحی نیز می‌باشد. بخش کلویین حل مرلفه‌های مزبور در مراجع مختلف قابل مشاهده است (بریبا و دومینگز، ۱۹۹۲) و بخش حل تکمیلی آن مطابق زیر ارائه می‌شود:

$$p_{ij}^c = \sigma_{jki}^c n_k \quad (6)$$

در رابطه فوق،  $p_{ij}^c$  مؤلفه تکمیلی نیروهای سطحی،  $\sigma_{jki}^c$  نماینده‌ی تنش در صفحه  $j$  ام و در امتداد  $k$  برای بار اعمالی در جهت  $i$  ام می‌باشد.  $n_k$  مؤلفه‌ی  $k$  ام از بردار نرمال عمود بر سطح می‌باشد. لازم به ذکر است که حل‌های اساسی نیروهای سطحی  $p_{ij}^*$  از جمع رابطه‌ی (۶) با مؤلفه‌های نیروهای سطحی کلویین به دست می‌آیند.

### ۲-۳. گسسته‌سازی انتگرال مرزی

به منظور حل عددی معادلات انتگرال مرزی در ابتدا لازم است معادلات مزبور گسسته شده و سپس با اقتناع شرایط مرزی، مجهولات مرزی محاسبه شوند. پس از گسسته‌سازی مرز با  $n$  المان ایزوپارامتریک درجه دو، فرم گسسته شده معادلات انتگرالی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$c_{ij}u_i = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} u_{ij}^* p_j d\Gamma_k - \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} p_{ij}^* u_j d\Gamma_k \quad (9)$$

شکل ماتریسی رابطه‌ی (۹) به صورت زیر است:

$$H \times U = G \times P \quad (10)$$

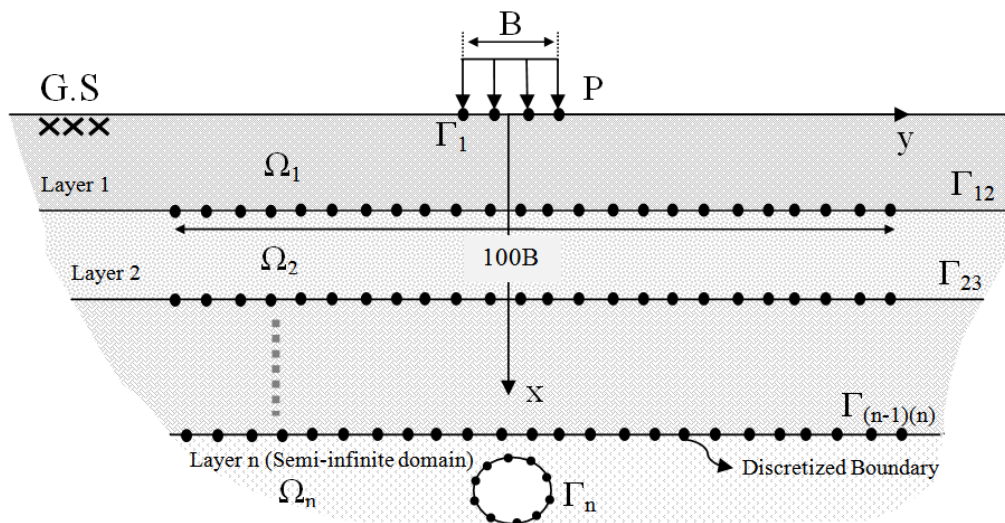
که ماتریس‌های  $H$  و  $G$  به ترتیب از انتگرال‌گیری مرزی حل‌های اساسی نیم‌صفحه برای مؤلفه‌های نیروی سطحی و تغییر مکان مطابق زیر به دست می‌آیند:

$$H_{ij} = \int_{\Gamma} p_{ij}^* d\Gamma \quad (11)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma} u_{ij}^* d\Gamma \quad (12)$$

### ۲-۴. اجزای مرزی نیم‌صفحه در محیط‌های چند لایه

در تحلیل محیط‌های چندلایه به کمک روش اجزای مرزی نیم‌صفحه تنها کفایت وجه میانی لایه‌ها و سطوحی که با قيودی مرتبط‌اند، گسسته شوند. در این راستا، هر لایه به طور جداگانه در نظر گرفته شده و سپس با اقتناع شرایط پیوستگی و سازگاری در وجوه مشترک آن، معادلات دو محیط با هم ترکیب شده و در نهایت حل می‌شوند. شکل ۲ یک محیط  $n$  لایه شامل زیر محیط‌های  $\Omega_1$  تا  $\Omega_n$  را در یک فضای نیمه‌بی‌نهایت نشان می‌دهد. در این شکل، مرز مشترک دو لایه مفروض مجاور هم  $i$  و  $j$  به صورت  $\Gamma_{ij}$  مشخص شده است.



شکل ۲. مدل محیط  $n$  لایه با استفاده از روش اجزای مرزی نیم‌صفحه

صورت جداگانه مورد تحلیل قرار گیرد. چنانچه وجه میانی لایه‌ها با دو زیرنویس و وجوه غیرمشترک (مثلاً

برای حل محیط لایه‌ای شکل ۲ با استفاده از اجزای مرزی نیم‌صفحه نیاز است ابتدا هر ناحیه به

سطح تحت بارگذاری یا تونل) با یک زیرنویس  
 مشخص شود، معادلات ماتریسی برای هر لایه مطابق  
 زیر نوشته می‌شوند:

$$\Omega_1: [H_1 \quad H_{12}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{12} \end{bmatrix} = [G_1 \quad G_{12}] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_{12} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\Omega_2: [H_{21} \quad H_{23}] \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{23} \end{bmatrix} = [G_{21} \quad G_{23}] \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{23} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\Omega_{n-1}: [H_{(n-1)(n-2)} \quad H_{(n-1)(n)}] \begin{bmatrix} u_{(n-1)(n-2)} \\ u_{(n-1)(n)} \end{bmatrix} = [G_{(n-1)(n-2)} \quad G_{(n-1)(n)}] \begin{bmatrix} p_{(n-1)(n-2)} \\ p_{(n-1)(n)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\Omega_n: [H_{(n)(n-1)} \quad H_n] \begin{bmatrix} u_{(n)(n-1)} \\ u_n \end{bmatrix} = [G_{(n)(n-1)} \quad G_n] \begin{bmatrix} p_{(n)(n-1)} \\ p_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$p_{ij} + p_{ji} = 0 \quad (18)$$

با برقراری شرایط مذکور در وجوه مشترک لایه‌ها،  
 ماتریس سرهم شده‌ی نهایی به صورت زیر تشکیل

در مرز مشترک بین دو لایه‌ی مجاور هم، شرایط  
 سازگاری تغییر مکان و پیوستگی تنش‌ها به صورت زیر  
 برقرار است:

خواهد شد:

$$u_{ij} = u_{ji} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{21} & H_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & H_{(n-1)(n-2)} & H_{(n-1)(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & H_{(n)(n-1)} & H_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_{12} \\ u_{23} \\ \vdots \\ u_{(n-2)(n-1)} \\ u_{(n)(n-1)} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{21} & G_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -G_{(n-1)(n-2)} & G_{(n-1)(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -G_{(n)(n-1)} & G_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_{12} \\ p_{23} \\ \vdots \\ p_{(n-2)(n-1)} \\ p_{(n)(n-1)} \\ p_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$AX = F \quad (20)$$

که A ماتریس ضرایب مجهول، X بردار مقادیر مجهول  
 (اعم از تغییر مکان یا تنش مرزی) و F بردار مقادیر

در نهایت، می‌توان معادلات ماتریسی مذکور را با  
 جای‌گذاری معلومات در یک طرف تساوی و  
 مجهولات در طرف دیگر، به صورت زیر به‌دست

آورد:

مدول الاستیسیته آن ۲۰۰ GPa فرض شده است. برای رسیدن به دقت مطلوب (پنجی و همکاران، ۱۳۹۱)، ۱۰۰ برابر عرض بارگذاری از طرفین وجه میانی لایه‌ها گسسته شده که در این راستا از ۶۰ المان درجه دوم استفاده شده است. برای گسسته‌سازی سطح زیر بارگذاری از ۴ المان درجه دو استفاده شده است. چنانچه در شکل ۳ دیده می‌شود، وضعیت تنش‌های قائم بی‌تعد (در شکل با Ist مشخص شده است) بر حسب نسبت B/h (عرض بارگذاری سطحی و h ضخامت لایه‌ی اول) برای عمق‌های مختلف نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، انطباق مناسبی بین نتایج عددی حاضر و پاسخ تحلیلی (پولوس و دیویس، ۱۹۹۱) وجود دارد. لازم به توضیح است که برای مدل‌سازی این محیط تنها یک وجه میانی و سطح بارگذاری مش‌بندی شده است که در مقایسه با مدل‌های مشابه اجزای مرزی محیط کامل، به شکل قابل توجهی تعداد گره‌ها و به نسبت آن پیچیدگی در مدل کاهش یافته است (۱۴). همچنین، مدت زمان این تحلیل با توجه به سرعت رایانه استفاده شده<sup>۱</sup> حدوداً ۲۰ ثانیه بوده است.

معلوم می‌باشد که از ضرب مقادیر معلوم مرزی در ماتریس ضرایب معلوم به‌دست می‌آید.

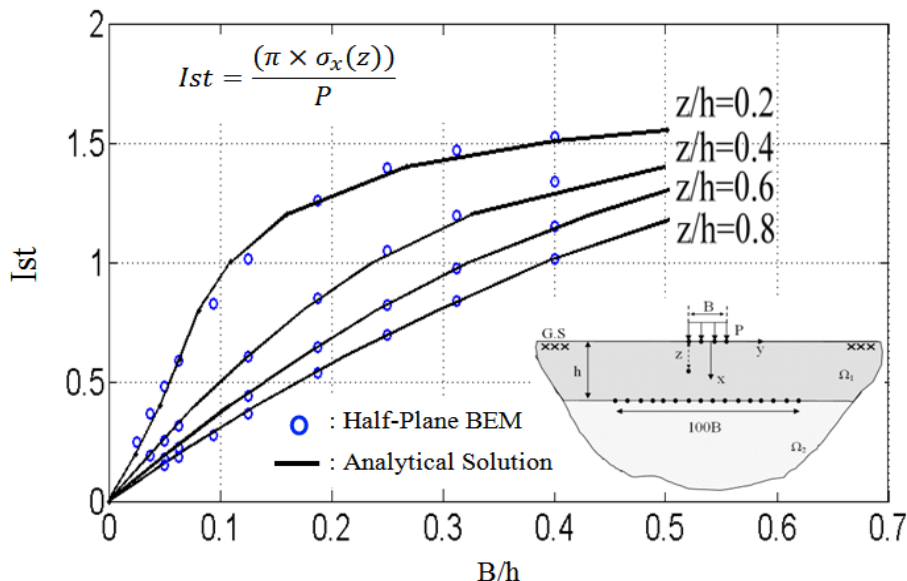
### ۳. مدل‌سازی عددی

#### ۳-۱. اعتبارسنجی

برای صحت‌سنجی مدل فوق، از چند پاسخ تحلیلی در دسترس کمک گرفته شده است. پولوس و دیویس (۱۹۹۱) توانستند با استفاده از روابط انتشار اثر بار نقطه‌ای در یک محیط الاستیک و انتگرال‌گیری از آن با توجه به شرایط مرزی، پاسخ‌های تحلیلی ناشی از اثر بارگذاری سطحی را بر رفتار تنشی محیط تک و دولایه خاک به‌دست آورند. در مطالعه آنها برای یک محیط دولایه، لایه‌ی دوم کاملاً صلب می‌باشد و تنش‌های قائم ناشی از اثر بارگذاری مستطیلی سطح زمین برای نقاط واقع در لایه‌ی اول ارائه شده است. مطابق شکل ۳، با به‌کارگیری روابط بخش قبل برای یک محیط دولایه و فرض وجود بار روی سطح زمین، ماتریس کلی سرهم شده به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & -G_{12} \\ 0 & H_{21} & G_{21} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_{12} \\ p_{12} \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_F \quad (21)$$

مدول الاستیسیته لایه‌ی اول ۳۰۰ MPa و ضریب پواسون آن ۰/۲ در نظر گرفته شده است. با توجه به صلب بودن لایه‌ی دوم (پولوس و دیویس، ۱۹۹۱)،

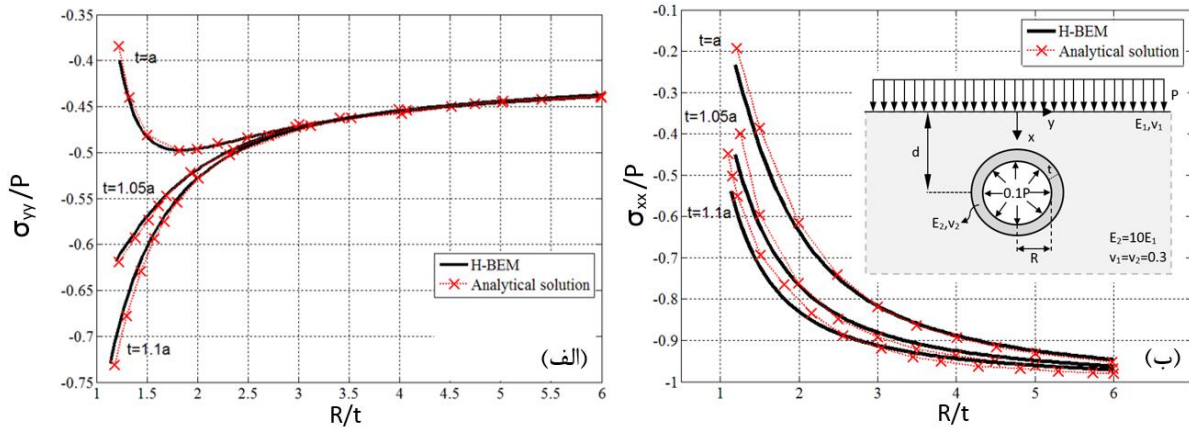


شکل ۳. مقایسه نتایج عددی حاضر (اجزای مرزی نیم‌صفحه) و پاسخ تحلیلی (پولوس و دیویس، ۱۹۹۱)

ادامه، با مدل‌سازی این مسئله با استفاده از روش اجزای مرزی نیم‌صفحه، پاسخ‌های تحلیلی و عددی برای تنش‌های شعاعی در دیواره و تاج تونل بر حسب فاصله از مرکز آن، به ترتیب در شکل‌های ۴-الف و ۴-ب ارائه و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. لازم به توضیح است که عمق تونل برای دستیابی به دقت مناسب  $d/B=3.8$  در نظر گرفته شده و مجموعاً از ۷۰ المان درجه دو جهت گسسته‌سازی مرز بار سطحی، تونل و پوشش آن استفاده شده است. همچنین، زمان حصول نتایج این تحلیل، به دلیل بیشتر بودن عرض بار سطحی، وجود پوشش تونل و به تبع آن استفاده از المان‌های بیشتر جهت گسسته‌سازی، به ۳۸ ثانیه رسیده است. همانطور که مشاهده می‌شود، انطباق مناسبی بین نتایج عددی و نتایج تحلیلی وجود دارد.

لی و وانگ (۲۰۰۸) برای تنش‌های اطراف تونل‌های پوشش‌دار مدفون در خاک تک‌لایه، پاسخ تحلیلی ارائه داده‌اند. این محققین، با استفاده از توابع پتانسیل مختلط، روابط کلی جهت محاسبه اثر توأمان فشار سطحی و داخلی تونل بر تنش‌های شعاعی و مماسی اطراف آن ارائه کردند. به منظور حصول این روابط، اثر فشار سطحی بر محیط خاک، با بریدن مرزها از طرفین و با استفاده از ضریب فشار جانبی بر مدل اعمال شده است. مدول برشی مصالح دیواره تونل ۱۰ برابر مدول برشی خاک اطراف آن و فشار داخلی آن ۰/۱ فشار سطح زمین در نظر گرفته شده است. فرض بر این بوده که عمق احداث تونل به حدی زیاد انتخاب شود که اثرهای فشار سطحی بر خاک اطراف تونل کاملاً همگن و مستطیلی باشد. در



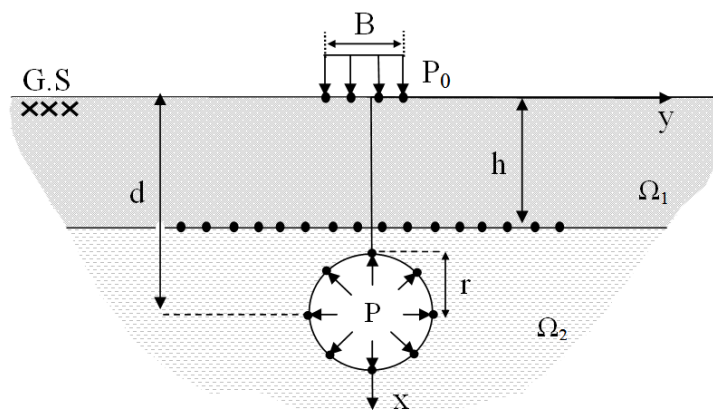


شکل ۴. تنش‌های شعاعی: الف) در امتداد دیواره ( $x=d, y>r+t$ ) و ب) در امتداد تاج ( $x=d-r-t, y=0$ ) تونل پوشش‌دار بر حسب فاصله از مرکز تونل (۲۲)

B وارد شده و تونل تحت فشار یکنواخت  $P=1000$  kPa قرار دارد. جنس توده سنگی پیرامون تونل دولومیت با مشخصات  $E_R=70$  GPa و  $\nu=0.15$  و جنس لایه‌ی سطحی خاک از نوع ماسه با مشخصات  $E_s=40$  MPa و  $\nu=0.3$  در نظر گرفته شده است. شعاع تونل ۵ m، فاصله‌ی تاج آن از مرز مشترک دولایه ۱ m و عرض بارگذاری سطحی ۴ m در نظر گرفته شده است. همچنین، در کلیه تحلیل‌ها، مرز مشترک دولایه خاک تا ۱۰۰ برابر طول بارگذاری سطحی (B) از طرفین گسسته شده است.

### ۲-۳. مطالعه‌ی پارامتریک: حفره در یک محیط دولایه

با علم به اینکه تونل‌ها از سازه‌های مهم، بخصوص در بافت‌های شهری، به حساب می‌آیند، نیاز است تا نحوه‌ی تأثیر تنش‌ی آنها بر محیط خاک و سطح زمین مورد ارزیابی قرار گیرد. لذا، در این قسمت، به عنوان یک مطالعه‌ی کاربردی، تأثیر تنش‌ی بازشدگی‌هایی نظیر تونل‌ها در محیط‌های لایه‌ای خاک مورد توجه قرار گرفته است. شکل ۵ یک تونل دایره‌ای تحت فشار به شعاع  $r$  در عمق  $d$  از سطح زمین را نشان می‌دهد. در سطح زمین، فشاری معادل  $P_0=5000$  kPa و به عرض



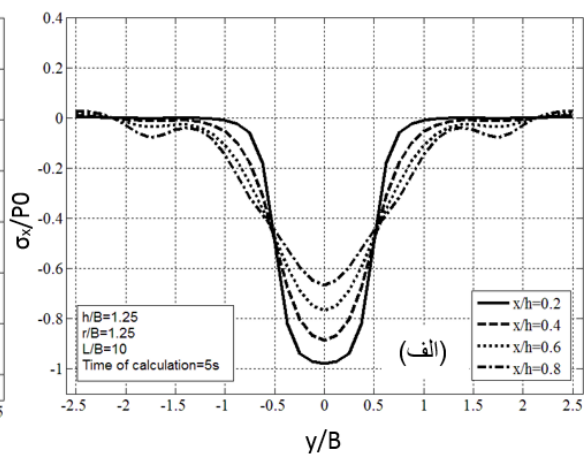
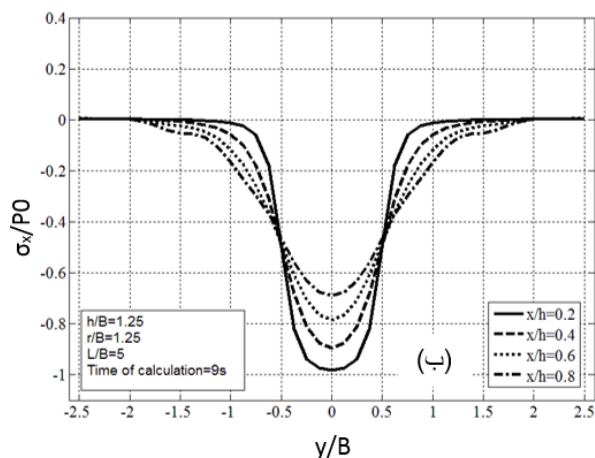
شکل ۵. حفره تحت فشار در محیط دولایه تحت فشار سطحی

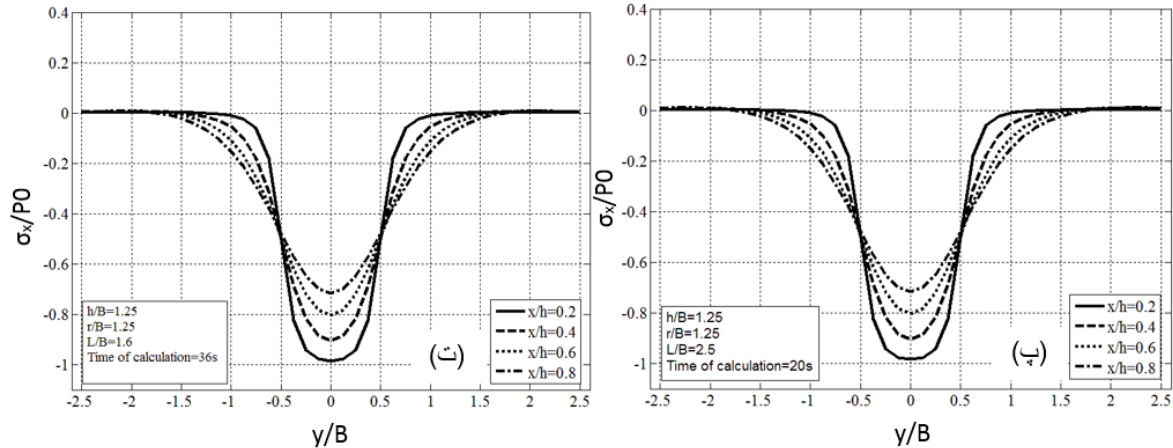
### ۳-۲-۱. اثر ضخامت لایه‌ی سطحی

شکل ۶، نتایج تحلیل تنش محیط شکل ۵ را برای تنش‌های قائم لایه اول نسبت به عمق نشان می‌دهد. در این شکل،  $P_0$  مبین شدت بار سطحی و  $B$  عرض آن است. همچنین،  $h$  معرف ضخامت لایه‌ی اول است. در شکل ۶-الف، از ۱۰ المان درجه دو برای گسسته‌سازی مرز مشترک، ۴ المان برای گسسته‌سازی مرز بارسطحی و ۳۰ المان برای گسسته‌سازی مرز حفره استفاده شده است. نسبت طول المان ( $L$ ) به عرض بارگذاری سطحی ( $B$ ) در این شکل برابر  $L/B=10$  می‌باشد و زمان تحلیل ۵ ثانیه بوده است. در شکل ۶-ب، از ۲۰ المان درجه دو برای گسسته‌سازی مرز مشترک بهره گرفته شده و سایر مشخصات تغییر نکرده است. در این شکل،  $L/B=5$  است. به دلیل کاهش طول المان، زمان تحلیل افزایش یافته و برابر ۹ ثانیه است. در شکل‌های ۶-پ و ۶-ت نیز به ترتیب از ۴۰ و ۶۰ المان درجه دوم جهت گسسته‌سازی مرز

مشترک استفاده شده که نسبت  $L/B$  برای دو شکل به- ترتیب ۲/۵ و ۱/۶ است. سایر مشخصات با شکل‌های قبل یکسان است. در شکل‌هایی که از تعداد المان‌های کمتر برای گسسته‌سازی مرز مشترک استفاده شده، هر چه به این مرز نزدیکتر باشیم، خطای محاسبات نیز افزایش می‌یابد، که این مسئله در شکل‌های ۶-الف و ۶-ب به خوبی نمایان است و با افزایش تعداد المان در شکل‌های ۶-پ و ۶-ت، نتایج دقیق‌تر و پایدارتر شده‌اند.

علاوه بر نتایج فوق، می‌توان به نتایج فنی دیگری نیز اشاره کرد. مقادیر تنش‌های قائم تابعی از عمق بوده و با افزایش عمق از شدت آنها کاسته شده است. شعاع تأثیر این تنش‌ها در اعماق مختلف برابر بوده و در فواصل  $|y| > 2B$  نسبت به مرکز بارگذاری به کلی از بین رفته‌اند. بیشترین مقدار تنش قائم در نزدیکی سطح ( $x/h < 0.2$ ) و در محدوده مرکز بارگذاری سطحی ( $y=0$ ) حادث شده است.

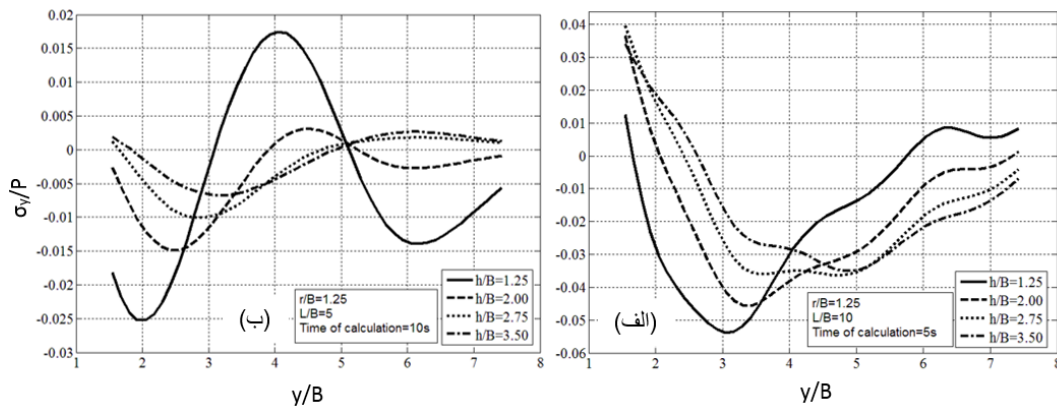


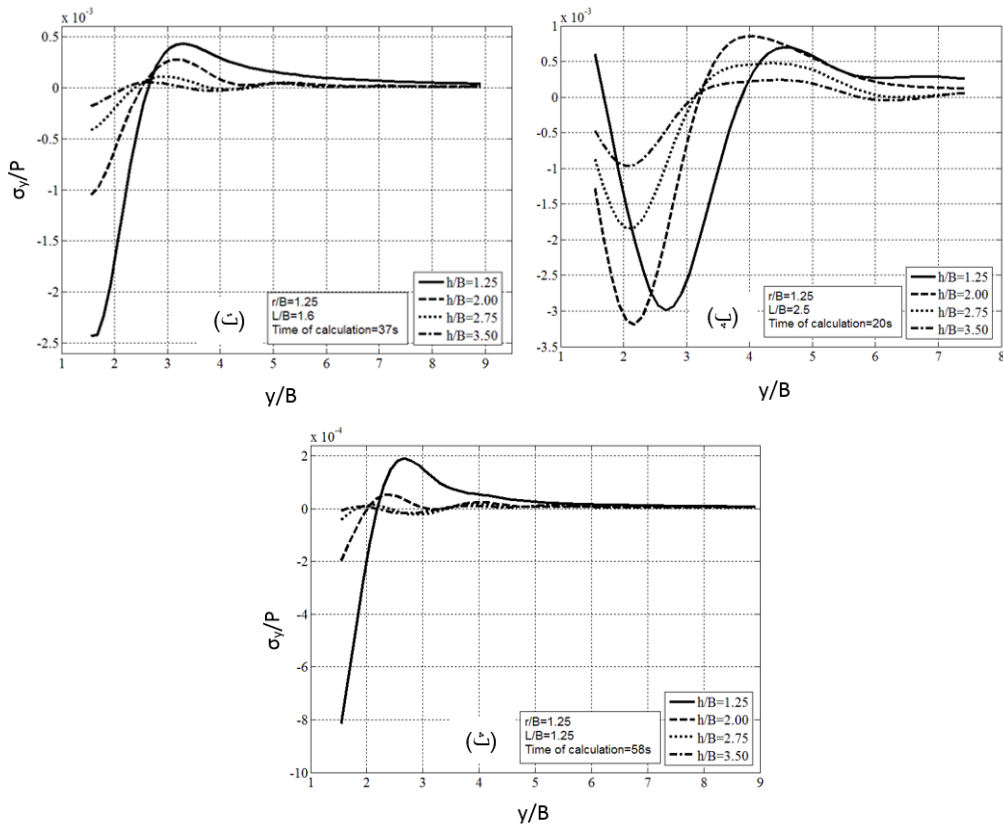


شکل ۶. تنش‌های قائم در اعماق مختلف لایه‌ی اول برای طول المان: الف)  $L=10B$ ، ب)  $L=5B$ ، پ)  $L=2.5B$  و ت)  $L=1.6B$

می‌باشد. همانطور که دیده می‌شود، در شکل‌های ۷- الف تا ۷- پ دقت نتایج به هیچ وجه قابل قبول نبوده و نوسانات تنش بسیار زیاد است. ولی در شکل‌های ۷- ت و ۷- ث که در آنها به ترتیب از ۶۰ و ۸۰ المان درجه دوم جهت گسسته‌سازی مرز مشترک استفاده شده نتایج پایدار و دقیق می‌باشد. همچنین، با توجه به این شکل‌ها، مقدار تنش‌های افقی با افزایش ضخامت لایه‌ی اول کاسته شده است. این تنش‌ها در فواصل  $|y| > 8B$  نسبت به مرکز بارگذاری سطحی به صفر همگرا می‌شوند.

به منظور ارزیابی اثرهای افزایش ضخامت لایه‌ی اول بر رفتار تنش محیط اطراف تونل، مقادیر تنش افقی در دیواره‌ی تونل ( $x=d, y>0$ ) ارزیابی شده و مطابق شکل ۷ بر حسب تغییرات ضخامت لایه‌ی سطحی ( $h$ ) نشان داده شده است. مشابه حالت قبل در شکل‌های ۷- الف تا ۷- ث، به ترتیب از ۱۰، ۲۰، ۴۰، ۶۰ و ۸۰ المان درجه دو برای گسسته‌سازی مرز مشترک لایه‌های خاک استفاده شده است. نکته قابل توجه در این شکل‌ها حساسیت بالای تنش‌های افقی دیواره تونل نسبت به ابعاد المان‌های مرز مشترک

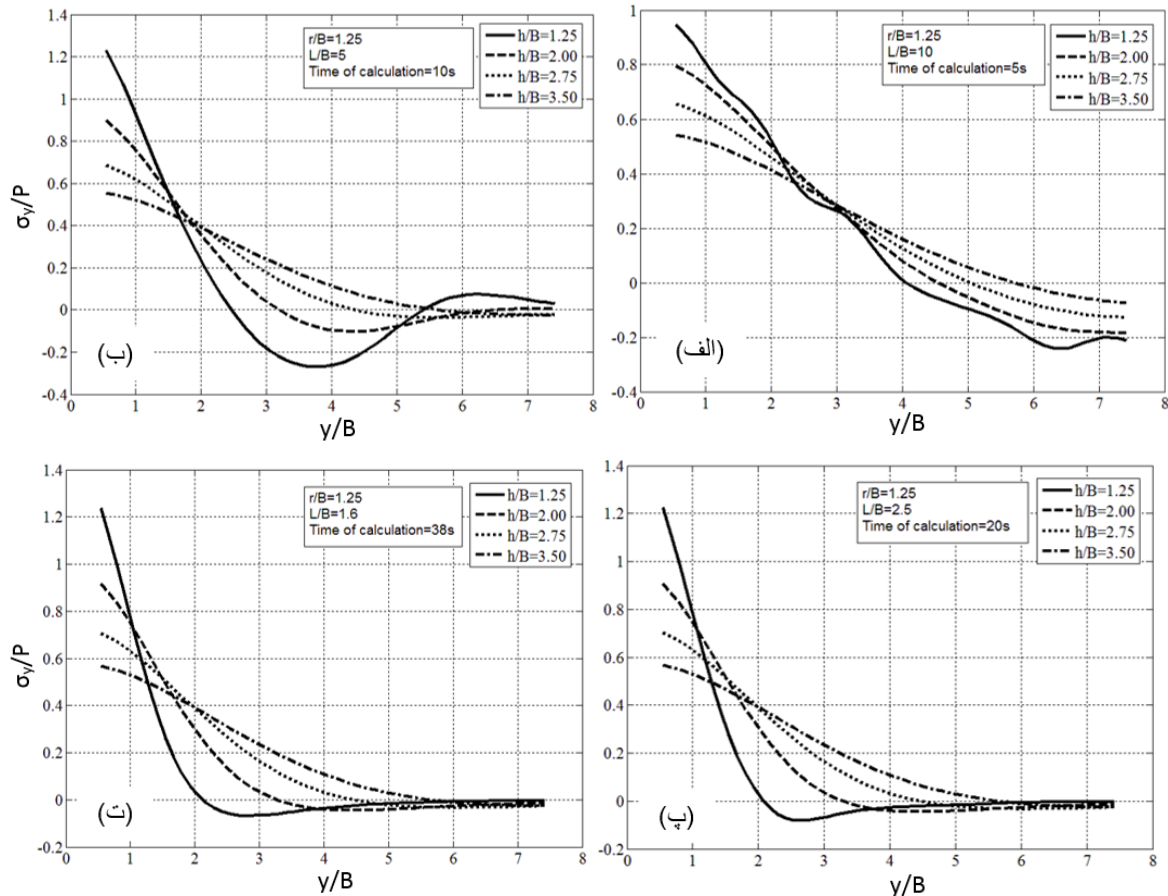




شکل ۷. تأثیر ضخامت لایه‌ی اول بر تنش‌های افقی دیواره تونل ( $x=d, y>0$ ) برای طول المان: الف)  $L=10B$ ، ب)  $L=5B$ ، پ)  $L=2.5B$ ، ت)  $L=1.6B$  و ث)  $L=1.2B$

بعد از فواصل  $|y|>7B$  نسبت به مرکز بارگذاری به صورت چشمگیری کاسته شده است. همانطور که دور از انتظار نیست، بیشترین مقدار تنش افقی در نزدیکی مبدأ مختصات (نزدیک بارگذاری سطحی) به وقوع می‌پیوندد. افزایش ضخامت لایه‌ی سطحی، و به تبع آن افزایش فاصله احداث تونل نسبت به سطح زمین، موجب کاهش سریع تنش‌های افقی سطحی شده است که این عامل به خوبی نشان دهنده‌ی تأثیر کمتر بارگذاری سطحی و تأثیر بسیار زیاد فشار درون حفره بر تنش‌های سطح زمین است.

برای مشاهده وضعیت تنش افقی در سطح زمین شکل ۸ ارائه شده است. همانند تنش‌های دیواره تونل، تنش‌های سطح زمین نیز نسبت به ابعاد المان لایه مرز مشترک ( $L$ ) حساس می‌باشند. به طوری که در شکل‌های ۸-الف و ۸-ب که در آنها به ترتیب از ۱۰ و ۲۰ المان درجه دوم برای گسسته‌سازی این مرز بهره گرفته شده، دقت نتایج نسبت به شکل ۸-ت قابل قبول نمی‌باشد. همچنین، چنانچه مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت لایه‌ی اول، مقدار تنش‌های افقی کاسته شده است. اثر توأمان بارگذاری سطحی و تنش‌های داخلی تونل بر تنش‌های سطحی



شکل ۸ تأثیر ضخامت لایه اول بر تنش‌های افقی سطح زمین ( $y > 0$ ) برای طول المان: الف)  $L=10B$ ، ب)  $L=5B$ ، پ)  $L=1.6B$  و ت)  $L=2.5B$

همچنین، برای بارهایی به شکل دوزنقه عددی بین صفر تا یک را نشان می‌دهد. در شکل‌های ۹ و ۱۰، تغییرات تنش قائم در دیواره‌ی تونل ( $x=d, y>0, y<0$ ) برای ضخامت ثابت  $h/B=1.25$  و در نسبت‌های تقارن مختلف نشان داده شده است. برای این منظور، از ۸۰ المان درجه دوم جهت گسسته‌سازی مرز مشترک لایه‌ها، ۴ المان برای گسسته‌سازی مرز زیر بارگذاری سطحی و ۳۰ المان برای گسسته‌سازی مرز حفره استفاده شده است.

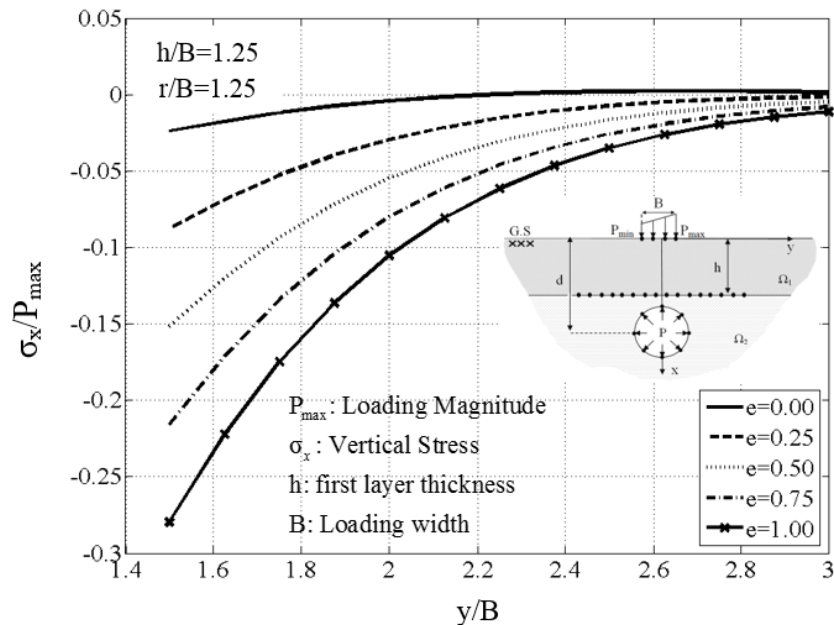
### ۳-۲-۲. اثر بارگذاری نامتقارن سطحی

با توجه به اینکه در اکثر حالات بارگذاری سطحی، علاوه بر نیروهای محوری، لنگر خمشی نیز روی آن مؤثر است، لذا در نظر گرفتن بارگذاری برون از محور می‌تواند قابل توجه باشد. برای این منظور، رابطه‌ی نسبت تقارن بار (e) مطابق زیر تعریف می‌شود:

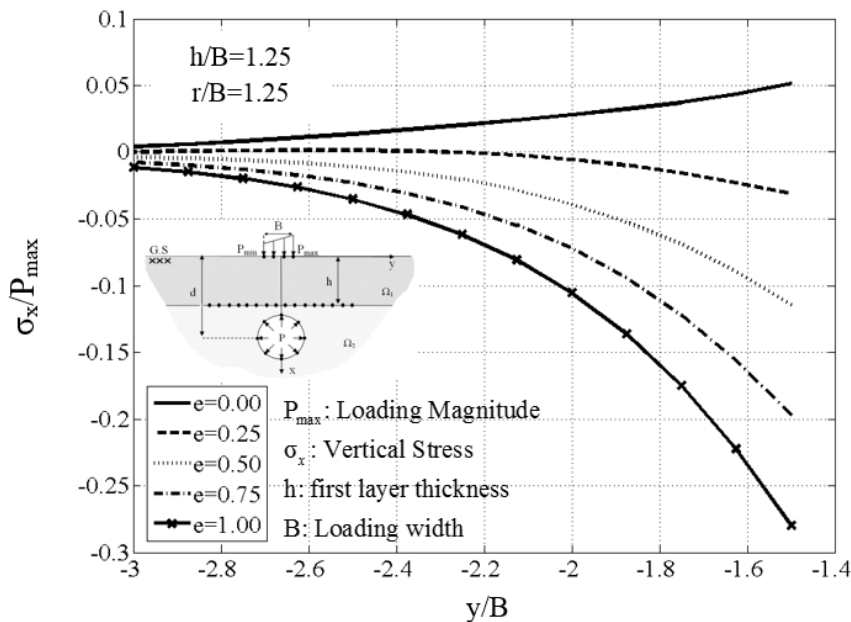
$$e = \frac{P_{min}}{P_{max}} \quad (22)$$

در رابطه‌ی فوق،  $P_{min}$  کمترین و  $P_{max}$  بیشترین شدت بار است. مقدار آن برای بار یکنواخت مستطیلی عدد یک و برای بار مثلثی عدد صفر به دست می‌آید.

تحلیل تنش‌های تونل‌های سطحی در خاک‌های لایه‌ای با استفاده از روش اجزای مرزی نیم‌صفحه



شکل ۹. اثر نسبت تقارن بارگذاری بر تنش‌های قائم دیواره‌ی راست تونل ( $x=d, y>0$ )



شکل ۱۰. اثر نسبت تقارن بارگذاری بر تنش‌های قائم دیواره‌ی چپ تونل ( $x=d, y>0$ )

است. شعاع تأثیر تنش در محدوده‌ی سمت راست تونل، با افزایش نسبت تقارن، افزایش یافته است. ولی به صورت میانگین، تنش‌های قائم در فواصل  $y>3B$  به صفر همگرا می‌شوند. همانند شکل ۹، در شکل ۱۰، نمودار تنش‌های قائم دیواره‌ی چپ تونل بر حسب

با توجه به شکل ۹، همانطور که دور از انتظار نیست، تنش‌های قائم در دیواره‌ی راست تونل ( $x=d, y>0$ ) با افزایش نسبت تقارن، افزایش یافته است. قله‌ی بیشترین تنش در نزدیکی تونل قرار داشته و با افزایش فاصله از آن از میزان تنش قائم کاسته شده

مؤثر است. به طوری که در یک طول ثابت (جهت گسسته‌سازی)، با افزایش تعداد المان و به تبع آن کاهش طول آن، دقت نتایج افزایش می‌یابد.

۲- تنش‌های افقی دیواره تونل، در مقایسه با تنش‌های سطحی، حساسیت بیشتری نسبت به طول المان-های مرز مشترک نشان می‌دهند. پیشنهاد می‌شود برای یک مرز مشترک با طول  $B$  (عرض بارگذاری سطحی)، حداقل از  $60B$  المان درجه دوم جهت گسسته‌سازی آن استفاده شود.

۳- با توجه به اثر تنشی بارگذاری سطحی و فشار داخلی تونل بر نقاط مختلف لایه‌ی اول، بیشترین تنش‌های قائم در نزدیکی سطح زمین مشاهده می‌شود و با فاصله گرفتن از سطح، از مقدار آنها کاسته می‌شود.

۴- تنش‌های قائم در لایه‌ی اول در فواصل  $|y| > 2B$  (عرض بارگذاری سطحی) نسبت به مرکز بارگذاری سطحی به صفر همگرا می‌شوند (شعاع تأثیر).

۵- تنش‌های قائم در دیواره‌ی تونل، با افزایش ضخامت لایه‌ی اول کاهش می‌یابند و در فواصل  $|y| > 8B$  نسبت به مرکز تونل به صفر همگرا می‌شوند.

۶- با افزایش ضخامت لایه‌ی سطحی، تنش‌های افقی سطح زمین کاهش می‌یابد. به طوری که میزان آن در نزدیکی بار از بیشترین مقدار برخوردار بوده و با افزایش فاصله در فواصل  $|y| > 7B$  به صفر متمایل می‌شوند.

۷- اثر تقارن بار سطحی بر تنش‌های قائم دیواره‌ی تونل نشان داد که شدت و علامت این تنش‌ها تابعی از شکل بار سطحی بوده و می‌تواند به صورت کششی یا فشاری بر نقاط مختلف محیط خاک اثر داشته باشد.

فاصله از مرکز تونل نشان داده شده است. این شکل به خوبی اثر نسبت تقارن بار بر تنش‌های قائم را نمایان ساخته است. در نسبت تقارن برابر با  $e=0$  که بار در حالت کاملاً مثلثی است، تنش‌های قائم دیواره چپ در وضعیت کشش هستند که با افزایش نسبت تقارن و شدت بار به فشار تغییر وضعیت می‌دهند. شعاع تأثیر در این نواحی تابعی از نسبت تقارن می‌باشد. به طوری که با افزایش آن، شعاع تأثیر تنش افزایش یافته است. به طور میانگین، می‌توان اینگونه فرض کرد که تنش‌های قائم سمت چپ تونل در فواصل  $y > 3B$  از مرکز آن به صفر متمایل شده‌اند.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش اجزای مرزی نیم‌صفحه برای محیط‌های لایه‌ای توسعه داده شده و به کار گرفته شده است. ضمن ارائه فرمول‌بندی، صحت روش مذکور به کمک حل چند مثال و مقایسه نتایج حاصل با پاسخ‌های تحلیلی در دسترس، بررسی شده است. در ادامه، اثر طول المان‌های مرز مشترک محیط‌های لایه‌ای بر سرعت و دقت نتایج حاصل از روش اجزای مرزی نیم‌صفحه برای حضور یک تونل زیرزمینی تحت فشار مطالعه شده است. هر چند در روش اجزای مرزی محیط کامل سطح صاف زمین و مرزهای بریده شده‌ی دوردست نیز به مرزهای گسسته شده اضافه می‌شوند (پنجی و همکاران، ۱۳۹۱)، ولی همانطور که مشاهده شد، در روش پیشنهاد شده، مش‌بندی تنها در وجوه میانی لایه‌ها و مرز حفرات متمرکز شده است. نتایج کلی مطالعات عددی مطابق زیر قابل جمع‌بندی هستند:

۱- اندازه طول المان‌های مرز مشترک بر دقت نتایج تنش‌های حاصل از روش اجزای مرزی نیم‌صفحه

## ۵. مراجع

- Loganathan, N. and Poulos, H. G. 1998. "Analytical prediction for tunneling induced ground movements in clays". *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 124(9): 846-856.
- Gioda, G. and Locatelli, L. 1999. "Back analysis of the measurements performed during the excavation of shallow tunnel in sand". *Int. J. Num. Analyt. Methods Geomech.*, 23: 1407-1425.
- Lee, K. M. and Rowe, R. K. 1991. "An analysis of three-dimensional ground movements: The Thunder Bay tunnel". *Can. Geotech. J.*, 28: 25-41.
- Verruijt, A. 1998. "Deformations of an elastic half plane with a circular cavity". *Int. J. Solids Struc.*, 35: 2795-2804.
- Augarde, C. E. and Burd, H. J. 2001. "Three-dimensional finite element analysis of lined tunnels". *Int. J. Num. Analyt. Methods Geomech.*, 25(3): 243-262.
- Garner, C. D. and Coffman, R. A. 2013. "Subway tunnel design using a ground surface settlement profile to characterize an acceptable configuration". *Tunnel. Underground Space Technol.*, 35: 219-226.
- Mollon, G., Dias, D. and Soubra, A. 2009. "Probabilistic analysis of circular tunnels in homogeneous soil using response surface methodology". *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 135(9): 1314-1325.
- Chen, C. Y. and Martin, G. R. 2002. "Soil-structure interaction for landslide stabilizing piles". *J. Comp. Geotech.*, 29(5): 363-386.
- عسگری مارنانی، ج. و پنجمی، م. ۱۳۸۶. "روش اجزای مرزی (تئوری و کاربرد)". چاپ اول، انتشارات نیوشانگار، تهران.
- Banerjee, P. K. and Butterfield, R. 1981. "Boundary Element Method in Engineering Science". McGraw-Hill, London.
- Xiao, B. and Carter, J. P. 1993. "Boundary element analysis of anisotropic rock masses". *J. Eng. Anal. Boundary Element*, 11: 293-303.
- Yang, L. and Sterling, R. L. 1989. "Back analysis of rock tunnel using boundary element method". *J. Geotech. Eng.*, 115(8): 1163-1169.
- عسگری مارنانی، ج. و پنجمی، م. ۱۳۸۵. "رفتار شالوده‌های نواری روی خاک‌های رسی تحت بارهای برون از محور". نشریه انجمن راه و ساختمان ایران، ۲۹: ۳۴-۴۴.
- پنجمی، م.، عسگری مارنانی، ج.، علی‌الهی، ح.، کوهساری، ح. و آدم پیرا، م. ۱۳۹۱. "بررسی پارامترهای مؤثر بر رفتار تنش‌ی تونل‌های کم عمق دو بُعدی با استفاده از روش اجزای مرزی". پژوهشنامه‌ی حمل و نقل، ۱۷-۲۸: ۱۰-۲۸.
- Panji, M., Asgari Marnani, J. and Tavousi Tafreshi, Sh. 2011. "Evaluation of effective parameters on the underground tunnel stability using BEM". *J. Struc. Eng. Geotech.*, 1(2): 29-37.
- Melan, E. 1932. "Der spannungszustand der durch eine einzelkraft in innern beanspruchten halbscheibe". *Z Angew Math. Mech.*, 12: 343-346.
- Mindlin, R. D. 1936. "Force at a point in the interior of a semi-infinite solid". *Physics*, 7: 195-202.
- Telles, J. C. F. and Brebbia, C. A. 1980. "Boundary element solution for half-plane problems". *J. Solid Struc.*, 12: 1149-1158.
- پنجمی، م.، عسگری مارنانی، ج. و انصاری، ب. ۱۳۹۴. "تحلیل لوله‌های مدفون انتقال آب با استفاده از روش اجزای مرزی نیم‌صفحه". نشریه سد و نیروگاه‌های برق‌آبی ایران، ۲(۴): ۲۲-۳۳.
- Brebbia, C. A. and Dominguez, J. 1992. "Boundary Element Introduction Course". Second edition, Southampton Computational Mechanics Publications.
- Poulos, H. G. and Davis, E. H. 1991. "Elastic Solution for Soil and Rock Mechanics". University of Sydney, Second edition, John Wiley & Sons.
- Li, S. C. and Wang, M. B. 2008. "Elastic analysis of stress-displacement field for a lined circular tunnel at great depth due to ground loads and internal pressure". *J. Tunnel. Underground Space Technol.*, 23: 609-617.